Quelle: MSZ (Ausgabe 2 1987)

VON DER MATHEMATIK

I.

Dass die Mathematik die Königin der Wissenschaften sei, gilt auch in unseren demokratischen Zeiten nicht als gänzlich obsoleter Vergleich, wo doch an Beispielen für abstraktes Denken kein Mangel herrscht, nachgerade mehr Theorien als Gegenstände die Welt bevölkern und umgekehrt der Fall nicht mehr eintritt, dass ein Intellektueller ausgerechnet durch das Studium der Elemente des Euklid den eigenen Geist gebildet hätte. Im Selbstbewusstsein der bürgerlichen Wissenschaft figuriert die Mathematik denn auch nicht als ein Vorbild, dem ernsthaft nachzueifern wäre, sondern steht für ein Ideal wissenschaftlicher Solidität, dem leider sonst nicht entsprochen werden könne. Bei ihr nämlich bewege sich der Verstand ausschließlich in den ihm eigenen Sphären und könne eben deshalb auch zu exakten Ergebnissen kommen und ordentliche Beweise führen, während die anderen, empirisch genannten Disziplinen dazu verdammt seien, nichts als "kühne" Vermutungen aufzustellen, und sich dem unendlichen Geschäft der Beseitigung von Irrtümern zu widmen, und zwar aus dem schönen Grund, dass man sich hier auf die ach so wirkliche Wirklichkeit einlassen müsse. Die Pointe dieser falschen Gegenüberstellung ist es aber, zugleich mit der Unsicherheit jedes Urteils über die Welt die Nichtigkeit des mathematischen Denkens zu demonstrieren. Denn dieses glänzt im Vergleich gerade darin, eine bloße Hirnweberei von ins Belieben gestellten Definitionen und todsicheren, weil tautologischen, Schlüssen zu betreiben, so dass der Mathematik an Inhalt abgeht, was den anderen Wissenschaften an Gewissheit fehlt, und somit beide Abteilungen nicht ernsthaft auf Objektivität und Wahrheit Anspruch erheben können.

> *"Als Mathematik können wir das Gebiet betrachten, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden, und ob das, was wir sagen, auch wahr ist." (Russell)*

Diese wohl bekannteste Definition der Mathematik gehört an sich zur gleichen Sorte sich selbst aufhebenden Blödsinns wie jene Antinomie der Mengenlehre, mit deren Kritik derselbe Autor Furore machte: Mathematische Wissenschaft liegt immer dann vor, wenn ihr die elementarsten Bestimmungen von Wissenschaft fehlen, oder ihr Gegenstand ist derjenige, von dem man ganz gewiss keine Ahnung haben kann. Das hätte den sonst so pingeligen Mathematikern auffallen müssen, gefiele ihnen dieser Spruch nicht eben wegen seiner verrückten Leugnung all dessen, was ihre Wissenschaft seit den alten Griechen an Einsichten aufeinander getürmt hat. Sie sehen nämlich heute ihre Ehre darin, eine zweck- und nutzlose Spielerei zu betreiben, die allenfalls nach ästhetischen Gesichtspunkten, amerikanisch "fun" geheißen, beurteilt werden könnte, und feiern ihre Wissenschaft als die reinste Verkörperung der Freiheit des Geistes, der zufolge man sich ohne die geringste Verpflichtung auf irgendwelche Sachkenntnis einfallen lassen kann, was man will:

> *"Denn sobald ich ein Axiom gesetzt habe, ist es vorhanden und ‚wahr'."*

Axiome wie ‚Die BRD ist gut' sind in der Mathematik bisher noch nicht vorhanden, wohl weil nicht gesetzt, und auch das Wort wahr in Anführungszeichen erinnert noch daran, dass es derart anspruchslos in der Wissenschaft nicht zugeht.

> *"Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge." (Hilbert)*

Klar, wenn einer sich etwas basteln will, muss er wenigstens auf die Konsistenz seines Tuns achten - aber mit der Wahrheit in der Wissenschaft oder gar der Existenz des Gegenstandes, den sie voraussetzt, hat das nichts zu tun. Hilberts falscher Schluss kennzeichnet die andere Seite der albernen Freiheit der Mathematik, nämlich ihren philosophischen Tiefgang, denn jetzt ist das Spiel mit den willkürlichen Axiomen auch ein großes Problem. Da muss man doch beim kleinen Einmaleins oder noch früher anfangen, alles in Zweifel ziehen, was man bislang wusste; da muss man, vergleiche das Russell-Zitat, den Widerspruch in Sätzen aufspüren, deren Bedeutung man nicht kennt, da muss man also Kalküle der formalen Logik aushecken, darüber rätseln, ob die nicht selber bloß Mathematik sind oder vielleicht umgekehrt, Sprachebenen unterscheiden, Modelle zu Modellen finden usw. usf. ... Man muss es einfach der Menschheit mitteilen, dass auch, schon, insbesondere die Mathematik ein wahres Wunder ist, hier also Abgründe des menschlichen Geistes aufgetan und ausgelotet werden, und somit just die Wissenschaft, der jeder Inhalt abgehen soll, zur rechten Deutung der Welt befähigt.

II.

Die Arbeit der Mathematiker wird von der ganzen Problemhuberei nicht berührt. Die wissen ganz genau, worüber sie jeweils was herausfinden wollen, geben keinem eine Chance, wilden Blödsinn als Diplomarbeit anzubieten, und verkünden sogar lauthals, dass ihre bloß mit Papier, Bleistift und Gehirnschmalz, also nahezu kostenfrei und wenig eindrucksvoll, gewonnenen Einsichten praxisrelevant sind, wofür sie auch schöne Beispiele anführen können. Umgekehrt hat hierzulande auch das große Publikum in der Schule mitgekriegt, dass die Mathematik von Zahlen oder geometrischen Figuren handelt, und dass dergleichen nicht nur zu Rechnereien und Zeichnungen, sondern veritablen Lehrsätzen wie dem des Pythagoras Anlass gibt, die bewiesen werden müssen. Die einzige

Plausibilität, auf die das erfundene Rätsel der Gegenstandslosigkeit der Mathematik bauen kann, besteht darin, dass man nicht umstandslos die guten alten Zahlen wiederfindet, wenn man ein mathematisches Lehrbuch aufschlägt und sich Theoremen gegenübersieht, in denen z.B. von lokal endlichen Familien oder plättbaren Graphen die Rede ist. Die Sorte Enttäuschung gibt es aber bei jeder anständigen Wissenschaft.

III.

Die Mathematik befasst sich mit der Quantität. Dass ihre Gegenstände damit nicht auf der Wiese wachsen, sondern dem Denken selbst angehören, dürfte eigentlich keinen Intellektuellen schrecken, der täglich über die Bedingungen und Möglichkeit oder falsche Verallgemeinerungen räsoniert und sich durch profunde Kenntnisse auf dem Gebiet der Logik ins rechte wissenschaftliche Licht zu setzen sucht. Die allgemeine Natur der Gedankendinge, mit denen sich speziell die Mathematik beschäftigt, ist aber auch kein Geheimnis. Ist zwar für die Bestimmung einer Sache die Quantität so notwendig wie ihre Qualität, so setzt die Frage nach dem ‚wie viel' doch allemal voraus, dass das ‚von was' schon abgemacht ist. Die Größe ist eine gleichgültige Bestimmung, die verändert werden kann, ohne dass die Sache selbst ihre Identität verlöre, und dieser Charakter der Quantität, bloß äußerliche Form zu sein, lässt sich in den über die bloßen Zahlen weit hinausführenden Gegenständen der Mathematik wie auch ihren dementsprechenden Verfahrensweisen durchaus entdecken.

Ganz im Gegensatz zur landläufigen Vorstellung gibt es in der Mathematik die Kontinuität des schlichten Weiterschließens nicht, was schon die Zweiteilung ihrer Darlegung in Satz und Beweis sinnfällig macht. Der Beweis für ein Theorem, zwingend wie er dann ist, muss immer erst entdeckt werden und erscheint von daher gar nicht als notwendig, weshalb es auch oft verschiedene Beweise für denselben Sachverhalt gibt. Die besonderere Schwierigkeit dieses Beweisens liegt stets darin, einen geschickten Ansatz zu finden, der die gewünschten Schlüsse erlaubt. Das heißt, man nimmt eine geeignete Veränderung seiner Objekt vor - um die Winkelsumme im Dreieck als 180 Grad zu beweisen, zieht man etwa die Parallele zur Grundseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt und betrachtet die Wechselwinkel an der neuen Figur -, man konstruiert, definiert, rechnet, stellt Gleichungen um usw. usf. Man verhält sich scheinbar ganz praktisch, wo es nur um ein theoretisches Resultat zu tun ist - die neuen Linien werden nicht zum Anschauen, sondern für den Beweis gezogen. Die Gegenstände der Mathematik machen also von sich aus nichts notwendig; ihr Inhalt besteht in äußerlichen Beziehungen, die deshalb an ihnen erst exekutiert werden müssen. Entsprechend ist die Richtigkeit eines solchen Beweises auch immer anderswoher geholt; er stützt sich auf das, was in früheren Sätzen demonstriert wurde, und eine mathematische Theorie wird so ein Gebäude von Sätzen und Beweisen, die auf gewisse erste Sätze zurückgehen.

Wenn nun in solchen Axiomen das Beweisen der Mathematik endet, ist damit keineswegs auch das Ende ihrer Wissenschaftlichkeit erreicht. Diese Anfangsbestimmungen einer Theorie sind umgekehrt immer erst das Resultat langwieriger Forschungsarbeit in einem Bereich - in der Infinitesimalrechnung hat das bald 200 Jahre gedauert -, deren Abschluss erst dazu befähigt, eine systematische Darstellung in der der Mathematik eigentümlichen Form zu geben, wo dann die Totalität von Axiomen und Folgerungen die Sache ausmacht. Wer bloß die Axiome kennt, in denen angeblich alles drinsteckt, und hier lässt sich alles Wichtige in wenigen Tagen lernen, hat ganz gewiss keine Ahnung von der Mathematik. Die Vernünftigkeit eines solchen Gebäudes, das fix und fertig wie vom Himmel gefallen und ebenso genial wie unverständlich erscheint, wird in der Mathematik gewöhnlich mit Zweckmäßigkeitsüberlegungen vorstellig gemacht. Man gelange durch das ganze Gedankenensemble schließlich dazu, einen bestimmten Kreis von mathematischen Fragen beantworten zu können. Tatsächlich wird ein Fortschritt in dieser Wissenschaft über die Analyse von Problemen erreicht, für die man eine Lösung findet und das Allgemeine daran formuliert, und Übergänge am Gegenstand Quantität erscheinen als gedankliche Konstruktionen.

Das einfachste und bekannteste Beispiel dazu sind wohl die Erweiterungen der Zahlen über die natürlichen 1, 2, 3,... hinaus. Die negativen Zahlen etwa werden begründet mit dem Bedürfnis, Gleichungen der Form a+x="b" auch dann lösen zu können, wenn a größer als b ist; entsprechend geht man bei den Brüchen von a*x="b" aus. Die Konstruktion, die die Mathematik dann ausführt, zeigt aber sofort, dass nicht ein Notbehelf für praktische Fragen - Schulden machen und Kuchen teilen kann man auch so - oder ein unbestimmtes Postulieren solcher Lösungen gegen ihre offenbare Nichtexistenz gemeint ist - dazu hätte das x allein auch schon genügt. Der Fortschritt zu den neuen Zahlen ist vielmehr einer zum quantitativen Verhältnis. Man geht über zu Zahlenpaaren (a,b), wie sie an sich in jenen Gleichungen vorliegen, identifiziert Paare wie (5,2) mit (6,3), (7,4) usw. im additiven respektive (10,4), (15, 6) usw. im multiplikativen Fall als dieselbe Gleichung ausmachend und fordert für diese Verhältnisse, insofern sie wegen jenes Ausgangspunktes auch nur Zahlen sind, die sogenannte Permanenz der Rechengesetze. Was herauskommt, ist ein Axiomensystem für die rationalen Zahlen (für die man noch die übliche Notation mit Vorzeichen und Bruchstrich einführt), das dann als Definition der weiteren theoretischen Entwicklung vorangestellt wird. Wenn damit einerseits für die Bedürfnisse der Mathematik jedes weitere Rekurrieren auf die "Genese" ihrer neuen Objekte unnötig ist, so kann an diesem post festum nicht unmittelbar einsichtigen Anfang dann andererseits gerätselt werden, ob man ihn entdeckt oder erfunden hat oder ob das Ganze nicht vielleicht bloß symbolische Bedeutung habe - neue Symbole hat man allerdings auch erfinden müssen.

Als völlig verkehrt erweist sich hier die beliebte Vorstellung, dass die Entwicklung der Mathematik ein Weg zu größerer Abstraktion sei, so als wäre eine gewöhnliche Zahl, nur weil man sie scheinbar ohne die Mühe des Nachdenkens immer schon kannte, konkreter als z.B. Brüche, Funktionen, Integrale usw., die einem zu hoch sind. Die Namen der verschiedenen Klassen von Zahlen, die im Unterschied zu den natürlichen, nicht "der liebe Gott gemacht" hat, also die irrationalen, transzendenten, imaginären, sind ein Denkmal des Misstrauens, das in die Leistungen der Mathematik gesetzt wurde und immer noch wird, weil es sich nur um solche des, wie denn anders abstrakten Denkens handelt. Übersehen wird dabei dann die entscheidende Tatsache, dass die Mathematik, will sie Wissenschaft sein und nicht nur das Einerlei der unmittelbar genommenen Zahlen anglotzen, von den Qualitäten des Quantitativen handeln muss. Dies leuchtet am Ergebnis ein - es liegen etwa jetzt unterschiedliche Arten von Zahlen vor - und wird auch durch die jeweilige Konstruktion explizit gemacht. In unserem Beispiel ging es um quantitative Verhältnisse, also solche Zahlen, die die gleichgültige Veränderbarkeit der bezogenen Größen enthalten und negieren, oder ganz analog bestimmt die axiomatische Fassung des Ergebnisses dieser Zahlen so, dass es zu ihnen ihr jeweiliges Inverses bezüglich der Addition oder Multiplikation gibt.

IV.

Der Tatsache, dass die Mathematik über die bloße Zahl hinaus fortschreitet, wird heute die Wendung gegeben, dass sie von Strukturen handele. Allerdings besteht das Qualitative hier wesentlich in den Beziehungen der gleichgültigen Existenzen aufeinander - man denke an die Definition der Primzahl, keinen echten Teiler zu haben - und die sogenannte "Strukturmathematik des 20. Jahrhunderts" triumphiert darin, das Gewaltige von der Wissenschaft erarbeitete Material unter diesem Gesichtspunkt klassifizierend abzuhandeln. Die diversen Gestalten der Quantität weisen Analogien auf, etwa mehr oder weniger gleichlautende Rechengesetze - so benehmen sich z.B. Matrizen wie gewöhnliche Zahlen, lassen sich addieren oder multiplizieren, aber ihre Multiplikation duldet die Vertauschung der Faktoren nur in einer bestimmten Klasse von Sonderfällen -, und geben deshalb Anlass zu einer systematischen Untersuchung abstrakter algebraischer Gesetze an vorgestellten Rechenobjekten überhaupt. Weil das wissenschaftliche Interesse, z.B. an Fragen der Lösbarkeit bestimmter Typen von Gleichungen, durch das Studium allein einer bestimmten Kollektion von Multiplikations- etc. -Regeln befriedigt werden kann, also weil solche Beziehungen der Sache wesentlich sind, ist diese "zweite Generation von Mathematik" eine vernünftige Abstraktion. Es entsteht aber hier mehr noch als bei der axiomatischen Darstellung der falsche Anschein, es handele sich um eine willkürliche Spielerei mit Regeln, wo man einfach mal eine weglässt oder eine neue dazu erfindet und anschließend überzeugende Realisierungen in der "konkreten Mathematik" suche. Die gleichen Leute, die diese strukturelle Betrachtungsweise als Gebot der "Denkökonomie" anpreisen, wo dann viele Fliegen auf einen Streich erschlagen werden können, verwenden das Wort Struktur als Schlachtruf der Freiheit der Mathematik, die Abstraktion betrachte, aber beileibe nicht die Qualität zum spezifischen Inhalt habe.

V.

Wenn der Motor der Wissenschaft von der Quantität das mathematische Problem ist, so haben ihre Bemühungen unmittelbar den Nutzen, in Verfahren zur Behandlung des Quantitativen zu resultieren; ihre Ergebnisse stellen Rechnungsweisen oder Kalküle bereit, ob es sich dabei nun um numerische Methoden im engeren Sinn handelt, die bestimmte Zahlenwerte zu ermitteln gestatten, oder ob sie z.B. Funktionsgleichungen richtig zu traktieren und damit alles Wissenswerte über den Kurvenverlauf zu erschließen lehrt. Während so im Unterschied zu anderen Gebieten der Logik, wo die Ergebnisse rein theoretischer Natur sind - wer weiß, was ein Urteil ist, kann deshalb nicht leichter urteilen -, das Studium der bloßen Form Quantität auf eine selbstständige Tätigkeit führt, befindet sich die Mathematik damit hinsichtlich der Wirklichkeit natürlich keineswegs in glücklicheren Umständen. Das "mathematische Paradies" blüht eben und erschöpft sich darin, durch ganz viel richtiges Denken keine Ahnung von der Welt zu haben und auch nie zu kriegen. Seine fundamentale Bedeutung in der Wissenschaft und daher auch im Leben beweist sich der Mathematiker deshalb daran, dass die anderen Disziplinen laufend Ansprüche an ihn stellen und von seinen Ergebnissen regen Gebrauch machen, und er erfreut sich an den Beispielen geradezu göttlicher Vorsehung, der zufolge die Mathematik eine neue Theorie just 10 Jahre vor der Zeit erfunden hat, als dann die neuen Methoden in der Atomphysik unumgänglich wurden. Liegt so aber der wirkliche Nutzen der Mathematik in ihrem Verhältnis zu anderen Wissenschaften, so ist es eben gar nicht notwendig, ob aus der Harmonie tatsächlich etwas wird, und die banale Tatsache, dass jedes Ding auch seinen quantitativen Aspekt hat, sagt nichts darüber aus, ob und in welchen Umständen die mathematische Analyse jemals wesentlich wird. Das Selbstbewusstsein des Mathematikers verfügt deshalb über gleich zwei Abteilungen des Eigenlobs.

Zum ersten pflegt er die eigene Gescheitheit, die nicht nur er in eine ganz eigene verfabelt. Er legt sich, soweit das die Natur gestatten will, ein eierköpfiges Kindergesicht zu, behauptet, sich in den Niederungen des Rechnens nicht auszukennen, und widmet seine Freizeit, di sich von der Arbeitszeit eigentlich nicht unterscheidet, den "recreational mathematics", also ganz intelligenten Intelligenzspielen, bei denen im Unterschied zum Rechnen nicht mit Zahlen gerechnet wird, was deshalb auch nicht jeder kann. Ist er in so was erst mal Weltmeiste, tüftelt er an einem Computerprogramm dafür, das besser ist als er selbst. Dann macht er sich seine freizügigen Gedanken über die Welt und ihre Möglichkeiten und überlegt sich, was geschähe, wenn der Raum z.B. zweidimensional wäre: Gar nicht so leicht, eine Türklinke zu erfinden, mit der die Flachmänner ihr plattes Eigenheim öffnen könnten.

Zum anderen aber weint er dreimal täglich Tränen darüber, dass selbst respektablere Teile seiner schönen Mathematik wohl nie in der Praxis reüssieren werden. Sowenig am Anlass solcher Bekenntnisse kritikabel wäre - für den Mathematiker bilden sie den Auftakt zur Verkündung seines Glaubens, dass alle Notwendigkeit in der Welt eine mathematische sei. Zu seiner tiefen Befriedigung präsentieren sich heute auch nicht mehr nur die Lehrbücher der Physik als angewandte Mathematik, und Wissenschaftler aller Fächer sind wild entschlossen, sein Ideal in die Tat umzusetzen. Mal nachschauen, was denn da gerechnet wird, fällt einem Mathematiker aber nicht im Traum ein, obwohl seinem skrupilösem Hirn der Gedanke naheliegen könnte, dass die Anwesenheit eines wahren Formelfriedhofs in einer Theorie an und für sich nichts über ihren wissenschaftlichen Wert aussagt - schließlich wurde noch jeder Fehlschluss in der Weltgeschichte mit dem Wort "also" eingeleitet. Die Quantität ist wie jedes andere Trumm Logik auch ein Modus, der Wirklichkeit den Garaus zu machen. Statt nämlich die Eigenart des jeweiligen Gegenstandes zu klären, der Thema ist, bespricht ihn ein moderner Sozialwissenschaftler als von anderen Gegenständen abhängig und übersetzt ihn so mühelos in eine mathematische Funktion - Geldmenge. Die falsche Abstraktion, sich alle waren in ein einheitliches Quantum zusammenaddiert zu denken, dem auf der anderen Seite ein Haufen Geld gegenübersteht, das nichts will als kaufen, eröffnet dann ein Kapitel Theorie, in dem es sehr mathematisch zugeht, also an irgendwelchen Funktionsgleichungen herumgedoktert werden kann, ohne dass das Ganze mit den existierenden Beziehungen von Ware und Geld das geringste noch zu tun hätte. Und das schönste Beispiel dieser als "Modellbildung" bezeichneten modernen Methode, wissenschaftliche Lügen in die Welt zu setzen, haben die Mathematiker selbst und für sich selbst erfunden. Ihrem blöden Problem , wie angeblich inhaltslose Theorien richtig sein können, suchen sie mit Kalkülen formaler Logik beizukommen, die zugleich das mathematische Denken darstellen und den Vorteil haben sollen, dass in ihnen nicht gedacht, sondern gerechnet wird. Einen schöneren Widerspruch kann man sich wirklich nicht einfallen lassen, die mathematische Weltanschauung in die Tat umzusetzen.